

Купить книгу "Гравитация. Том 3"

Ч. МИЗНЕР

К. ТОРН

ДЖ. УИЛЕР

ГРАВИТАЦИЯ

3

ИЗДАТЕЛЬСТВО
МИР

31. ГЕОМЕТРИЯ ШВАРЦШИЛЬДА

Эта глава, посвященная шварцшильдовской геометрии, необходима как подготовительный материал для изучения гравитационного коллапса (следующая глава) и черных дыр (гл. 33).

§ 31.1. НЕИЗБЕЖНОСТЬ КОЛЛАПСА ДЛЯ СВЕРХМАССИВНЫХ ЗВЕЗД

Если число барионов в звезде превосходит приблизительно в два или более раз число барионов в Солнце ($A > A_{\text{макс}} \sim 2A_{\odot}$), то в самом конце термоядерной эволюции для такой звезды не существует равновесного состояния. Это один из самых поразительных и волнующих выводов из того, что обсуждалось в гл. 24. Другими словами, прежде, чем звезда с $A > A_{\text{макс}} \sim 2A_{\odot}$ придет в конечное состояние покоя, она должна выбросить, например путем взрывов новой или сверхновой, столько барионов, чтобы оставшееся их число не превышало $A_{\text{макс}}$; в противном случае конечного состояния покоя, в которое могла бы прийти звезда, не существует.

Какова же судьба звезды, которой не удалось выбросить избыток барионов до того, как подойдет к концу термоядерная эволюция? Что случится, например, после взрыва очень массивной сверхновой со сколлапсировавшим ядром, состоящим из вырожденных нейтронов, если оно содержит больше чем $A_{\text{макс}}$ барионов? Такая сверхкритическая масса не может взорваться, поскольку является гравитационно связанной, и в ней исчерпана термоядерная энергия, которая могла бы высвободиться. Не может она достичь и статического равновесного состояния, поскольку для таких больших масс подобного состояния не существует. Остается только одна возможность: сверхкритическая масса должна, катастрофически сжимаясь, уйти под свой «гравитационный радиус» $r = 2M$, оставив после себя в пространстве гравитирующую «черную дыру».

Явление коллапса под гравитационный радиус, как оно описывается в классической общей теории относительности, рассматривается в следующей главе. Однако, прежде чем заняться этим вопросом, необходимо составить себе более полное, чем в предыдущих главах, представление о шварцшильдовской геометрии пространства-времени вокруг черных дыр, а также вокруг коллапсирующих и статических звезд.

В этой главе затрагиваются два на первый взгляд не связанные между собой вопроса: падение пробной частицы в уже имеющейся геометрии Шварцшильда, которая рассматривается как статическая, но которую можно также представлять себе как оставшуюся от звезды, претерпевшей коллапс некоторое время тому назад, и вопрос о физическом характере шварцшильдовской геометрии как таковой. Метод пробных частиц является самым эффективным методом исследования этой геометрии. Но на пробную частицу можно взглянуть и с иной точки зрения. Ее можно представить себе как частичку вещества, оставшуюся в процессе быстрого сжатия звезды от основной ее массы. При таком подходе пробная частица представляет собой простейшую иллюстрацию асимметрии в распределении вещества коллапсирующей звезды. Поэтому то обстоятельство, что асимметрия в этом случае сглаживается, позволяет качественно понять, каким образом сглаживаются более сложные типы асимметрии. Короче говоря, две такие, казалось бы, разные проблемы, как движение пробной частицы и динамика шварцшильдовской геометрии (а в дальнейшем станет ясно, что эта геометрия носит динамический характер), удивительным образом способны пролить свет одна на другую.

§ 31.2. ОТСУТСТВИЕ СИНГУЛЯРНОСТИ НА ГРАВИТАЦИОННОМ РАДИУСЕ

Может показаться, что шварцшильдовская геометрия пространства-времени

$$ds^2 = - \left(1 - \frac{2M}{r} \right) dt^2 + \frac{dr^2}{1 - 2M/r} + r^2 (d\theta^2 + \sin^2 \theta d\phi^2) \quad (31.1)$$

При радиусе $r = 2M$ («гравитационном радиусе») шварцшильдовский линейный элемент становится сингулярным

обладает сингулярностью вблизи $r = 2M$, где g_{tt} обращается в нуль, а g_{rr} — в бесконечность. Однако без тщательного анализа нельзя с уверенностью сказать, является ли эта сингулярность линейного элемента следствием сингулярности самой геометрии пространства-времени или же она вызвана всего лишь сингулярностью системы координат (t, r, θ, ϕ) вблизи $r = 2M$. [В качестве примера такой сингулярности системы координат рассмотрим окрестность точки $\theta = 0$ на одной из инвариантных сфер $t = \text{const}$ и $r = \text{const}$. Здесь $g_{\phi\phi}$ обращается в нуль из-за того, что система координат обладает сингулярностью, в то время как поведение,

присущее сфере, не зависящей от выбора системы координат геометрии, в этом месте вполне нормально. Другой пример см. на фиг. 1.4 (т. 1).]

Область шварцшильдовской геометрии, где возникают указанные затруднения, $r = 2M$, называется «гравитационным радиусом», «шварцшильдовским радиусом», «поверхностью Шварцшильда», «горизонтом Шварцшильда», или, наконец, «сферой Шварцшильда». В некоторых более ранних работах эту область называют также «шварцшильдовской сингулярностью»; но такое название нельзя считать правильным, поскольку, как будет показано ниже, геометрия пространства-времени в этой области не имеет сингулярности.

Чтобы определить, является ли геометрия пространства-времени сингулярной на гравитационном радиусе, пошлем туда воображаемого первоначально удаленного наблюдателя, который должен составить описание локальных свойств этой геометрии. Для простоты пусть он находится в состоянии свободного радиального падения по направлению к гравитационному радиусу; при этом с ним постоянно связана сопутствующая ему ортогональная тетрада. Его траектория в пространстве-времени [«параболическая орбита», радиальная геодезическая в метрике (31.1)] задается следующими уравнениями:

$$\begin{aligned} \frac{\tau}{2M} &= -\frac{2}{3} \left(\frac{r}{2M} \right)^{3/2} + \text{const}, \\ \frac{t}{2M} &= -\frac{2}{3} \left(\frac{r}{2M} \right)^{3/2} - 2 \left(\frac{r}{2M} \right)^{1/2} + \ln \left| \frac{(r/2M)^{1/2} + 1}{(r/2M)^{1/2} - 1} \right| + \text{const}. \end{aligned} \quad (31.2)$$

[См. § 25.5 и особенно вывод и обсуждение уравнения (25.38).] Решая первое уравнение относительно r , получаем зависимость координаты r наблюдателя от собственного времени, измеряемого по часам наблюдателя, $r(\tau)$. Решая второе уравнение относительно r , получаем зависимость координаты r от координатного времени $r(t)$.

Из всех особенностей траектории наблюдателя выделяется одна: чтобы достичь гравитационного радиуса $r = 2M$, требуется конечный промежуток собственного времени, но бесконечный промежуток координатного времени:

$$\begin{aligned} r/2M &= 1 - (\tau + \text{const})/2M && \text{вблизи } r = 2M, \\ r/2M &= 1 + \text{const} \cdot \exp(-t/2M) && \text{в пределе } t \rightarrow \infty \end{aligned} \quad (31.3)$$

[см. фиг. 25.5]. Наблюдатель живет, конечно, по собственному времени, именно этим временем определяется его пульс. Никакая система координат не может воспрепятствовать ему достичь $r = 2M$. Только геометрия пространства-времени, которая не зависит от выбора системы координат, способна была бы помешать этому, но, как видно из уравнений (31.3), не мешает!

Падающий наблюдатель достигает $r = 2M$ за конечное собственное время, но за бесконечное координатное время

Допустим, что наблюдатель достиг $r = 2M$. Какая геометрия пространства-времени предстанет перед ним в этом месте? Сингулярная или несингулярная? Другими словами, что измерит наблюдатель — бесконечно большие приливные силы, которые разорвут и сдавят его, когда он достигнет $r = 2M$, или же он почувствует лишь конечные приливные воздействия, которые его тело в принципе может выдержать?

Приливные силы, которые испытывает наблюдатель при прохождении данного радиуса r , определяются компонентами тензора кривизны Римана, отнесенными к ортогональной сопутствующей системе отсчета в этом месте (уравнение отклонения геодезических). Проведем вычисление этих компонент кривизны в два этапа.

1. Вычислим компоненты тензора Римана, но не в системе отсчета наблюдателя, а в «статической» ортогональной системе отсчета

$$\begin{aligned}\omega^{\hat{t}} &= \left(1 - \frac{2M}{r}\right)^{1/2} dt, & \omega^{\hat{r}} &= \frac{dr}{(1 - 2M/r)^{1/2}}, \\ \omega^{\hat{\theta}} &= r d\theta, & \omega^{\hat{\phi}} &= r \sin \theta d\phi,\end{aligned}\quad (31.4a)$$

локализованной в том пространственно-временном событии, через которое проходит наблюдатель; результат [который получается из уравнений (14.50) и (14.51), если положить $e^{2\Phi} = e^{-2\Lambda} = 1 - 2M/r$] имеет вид

$$\begin{aligned}R_{\hat{t}\hat{r}\hat{t}\hat{r}} &= \frac{-2M}{r^3}, & R_{\hat{t}\hat{\theta}\hat{t}\hat{\theta}} &= R_{\hat{t}\hat{\phi}\hat{t}\hat{\phi}} = \frac{M}{r^3}, \\ R_{\hat{\theta}\hat{\phi}\hat{\theta}\hat{\phi}} &= \frac{2M}{r^3}, & R_{\hat{r}\hat{\theta}\hat{r}\hat{\theta}} &= R_{\hat{r}\hat{\phi}\hat{r}\hat{\phi}} = \frac{-M}{r^3};\end{aligned}\quad (31.4б)$$

все другие компоненты $R_{\hat{\alpha}\hat{\beta}\hat{\gamma}\hat{\delta}}$ обращаются в нуль, за исключением тех компонент, которые могут быть получены из приведенных выше с помощью свойств симметрии **R**.

2. Вычислим компоненты в системе отсчета наблюдателя, применяя к компонентам в «статической системе отсчета» (31.4б) подходящее преобразование. Для $r > 2M$ таким преобразованием служит лоренцевский буст¹⁾ в направлении $\mathbf{e}_{\hat{r}}$ с трехмерной скоростью $v^{\hat{r}}$; при $r < 2M$ буст не существует, но преобразование дается стандартным выражением для буста (дополнение 2.4), где $v^{\hat{r}} > 1$. Здесь

$$v^{\hat{r}} = \frac{(g_{rr})^{1/2} dr}{(-g_{tt})^{1/2} dt} = \frac{dr/dt}{1 - 2M/r} = -\left(\frac{2M}{r}\right)^{1/2}. \quad (31.5)$$

Поразительный результат (являющийся следствием специальных алгебраических свойств геометрии Шварцшильда и в чем-то схожий с тем, что происходит или, лучше сказать, не происходит

¹⁾ См. примечание в т. 1, стр. 106. — *Прим. перев.*

с компонентами электромагнитного поля E и B , когда они одновременно параллельны бусту) состоит в следующем: все компоненты R при действии на них буста остаются неизменными. Если $e_{\hat{\rho}}$ — радиальный базисный вектор наблюдателя, а $e_{\hat{\tau}} = u$ — его временной базисный вектор, то

$$\begin{aligned} R_{\hat{\tau}\hat{\rho}\hat{\tau}\hat{\rho}} &= -2M/r^3, & R_{\hat{\tau}\hat{\theta}\hat{\tau}\hat{\theta}} &= R_{\hat{\tau}\hat{\phi}\hat{\tau}\hat{\phi}} = M/r^3, \\ R_{\hat{\theta}\hat{\phi}\hat{\theta}\hat{\phi}} &= 2M/r^3, & R_{\hat{\rho}\hat{\theta}\hat{\rho}\hat{\theta}} &= R_{\hat{\rho}\hat{\phi}\hat{\rho}\hat{\phi}} = -M/r^3 \end{aligned} \quad (31.6)$$

(см. упражнение 31.4).

Из этого вычисления следует, что, согласно выражениям (31.6), ни одна из компонент R в ортогональной системе отсчета наблюдателя не обращается на гравитационном радиусе в бесконечность. Приливные силы, которые испытывает путешественник по мере приближения к $r = 2M$, остаются конечными; они не разорвут путешественника на части — по крайней мере в том случае, когда масса M достаточно велика, поскольку при $r = 2M$ типичная ненулевая компонента $R_{\hat{\alpha}\hat{\beta}\hat{\gamma}\hat{\delta}}$ тензора кривизны имеет величину порядка $1/M^2$. Гравитационный радиус является областью пространства-времени с вполне нормальным поведением, не обладающей сингулярностью, и ничто не может в этой области помешать наблюдателю падать далее внутрь.

Но глубоко внутри, под гравитационным радиусом, наблюдатель встретит бесконечные приливные силы, причем это произойдет независимо от пути, по которому он туда попал. В этом смысле говорят, что « $r = 0$ является физической сингулярностью пространства-времени». Чтобы убедиться в этом, необходимо вычислить, пользуясь (31.4б) и (31.6), «инвариант кривизны»

$$I \equiv R_{\hat{\alpha}\hat{\beta}\hat{\gamma}\hat{\delta}} R^{\hat{\alpha}\hat{\beta}\hat{\gamma}\hat{\delta}} = 48M^2/r^6. \quad (31.7)$$

В любой локально лоренцевой системе отсчета этот инвариант является суммой произведений компонент тензора кривизны и имеет одно и то же значение $48M^2/r^6$. Таким образом, в любой локально лоренцевой системе отсчета, включая систему отсчета наблюдателя, R имеет одну или несколько компонент, которые обращаются в бесконечность при $r \rightarrow 0$; это и означает, что приливные силы становятся бесконечными.

На радиусе $r = 2M$ падающий наблюдатель не испытывает бесконечных приливных сил

Таким образом, при $r = 2M$ геометрия пространства-времени имеет нормальное поведение, а система координат в этом месте сингулярна

При $r = 0$ кривизна бесконечна

31.1. Приливные силы, действующие на свободно падающего наблюдателя

УПРАЖНЕНИЕ

а. Проведите во всех деталях вывод компонент тензора Римана (31.6).

б. Дайте грубую оценку критической массы $M_{кр}$, такой, что при $M_{кр}$ тело наблюдателя (человеческое тело, состоящее из обычных костей и обыкновенной плотности) может выдержать при-

УПРАЖНЕНИЕ ливные силы при $r = 2M$, но при $M < M_{\text{кр}}$ эти силы искалечат его. (Ответ: $M_{\text{кр}} \sim 1000 M_{\odot}$. Очевидно, что при $M \sim M_{\odot}$ физику следует превратиться в муравья, прежде чем ринуться навстречу опасности. Подробности см. в § 32.6.)

Дополнение 31.1. «ШВАРЦШИЛЬДОВСКАЯ СИНГУЛЯРНОСТЬ»: ИСТОРИЧЕСКАЯ СПРАВКА

Эддингтон [37] впервые построил систему координат, свободную от сингулярности при $r = 2M$, однако он не вполне осознал значение своего результата. Леметр (см. [38], особенно стр. 82), по-видимому, первый понял, что так называемая «шварцшильдовская сингулярность» при $r = 2M$ вовсе не является сингулярностью. Он писал: «La singularité du champ de Schwarzschild est donc une singularité fictive, analogue à celle qui se présentait à l'horizon du centre dans la forme originale de l'univers de de Sitter»¹⁾. Он тоже построил систему координат, охватывающую горизонт $r = 2M$. Тем не менее его система координат, подобно системе Эддингтона, охватывала лишь половину геометрии Шварцшильда (области I и II на фиг. 31.3). Синг [39] впервые открыл неполноту систем координат Эддингтона и Леметра и построил новую систему координат, которая охватывает всю геометрию (области I, II, III, IV на фиг. 31.3). Фронсдал [40], не знавший о работе Синга, заново открыл глобальную структуру геометрии Шварцшильда с помощью диаграмм погружения и вычислений. Система координат, которая наиболее полно охватывает геометрию Шварцшильда, известна как система координат Крускала — Шекереса. Крускал [41] и Шекерес [42] построили ее независимо друг от друга.

§ 31.3. ПОВЕДЕНИЕ ШВАРЦШИЛЬДОВСКИХ КООРДИНАТ ПРИ $r = 2M$

Сущность сингулярности координат при $r = 2M$

Поскольку поведение геометрии пространства-времени на гравитационном радиусе вполне нормально, сингулярный характер шварцшильдовских метрических компонент $g_{tt} = -(1 - 2M/r)$ и $g_{rr} = (1 - 2M/r)^{-1}$ должен быть обусловлен сингулярностью шварцшильдовских координат t, r, θ, ϕ . Необходимо каким-то образом найти способ избавиться от этой сингулярности, т. е. надо построить новую систему координат, в которой сингулярность отсутствует. Прежде чем заниматься этим, полезно лучше разобраться, в чем именно заключается сущность этой сингулярности.

¹⁾ «Сингулярность в поле Шварцшильда является такой же фиктивной сингулярностью, как и сингулярность, представленная горизонтом вокруг центра вселенной де Ситтера в ее первоначальной форме» (франц.). — *Прим. перев.*

Наиболее очевидным образом сингулярность при $r = 2M$ проявляется в том, что временная t и пространственная r координаты меняются в этом месте ролями¹⁾. В области $r > 2M$ направление t , т. е. $\partial/\partial t$, является времениподобным ($g_{tt} < 0$), а направление r , т. е. $\partial/\partial r$, — пространственноподобным ($g_{rr} > 0$); но при $r < 2M$ $\partial/\partial t$ пространственноподобно ($g_{tt} > 0$), а $\partial/\partial r$ времениподобно ($g_{rr} < 0$).

Что следует понимать под тем обстоятельством, что координата r , выступавшая в качестве пространственноподобной координаты, становится времениподобной? Воображаемый наблюдатель, который перемещается в космическом корабле с ракетными двигателями, но не достиг еще $r = 2M$, всегда имеет возможность включить двигатели и направить свое движение, которое до этого проходило с уменьшением r (падение), в сторону увеличения r (преодоление сил притяжения). Но если он попал внутрь сферы $r = 2M$, то ситуация в корне меняется. В этом случае дальнейшее уменьшение r играет роль течения времени. Среди тех команд, которые путешественник может дать своим ракетным двигателям, нет такой, которая могла бы повернуть время вспять. Та же незримая повсюду действующая сила, которая независимо от нашей воли влечет каждого из нас от возраста двадцать лет к сорока годам и от сорока лет к восьмидесяти, тянет ракету внутрь от временной координаты $r = 2M$ к более позднему значению временной координаты $r = 0$. Никакой акт человеческой воли, никакой двигатель, никакая ракета, никакая сила (см. упражнение 31.3) не могут заставить время остановиться. Как несомненно то, что живые клетки умирают, а часы путешественника отстукивают «безвозвратно уходящие минуты», так же несомненно и то, что r неуклонно уменьшается от $2M$ до нуля.

При $r = 2M$, где r и t меняются ролями как пространственная и временная координаты, g_{tt} стремится к нулю, в то время как g_{rr} обращается в бесконечность. Обращение g_{tt} в нуль предполагает, что поверхность $r = 2M$, которая может сначала показаться трехмерной в шварцшильдовской системе координат ($-\infty < t < +\infty$, $0 < \theta < \pi$, $0 < \phi < 2\pi$), имеет объем, равный нулю, и, следовательно, на самом деле является всего лишь двумерной или, иначе говоря, нулевой поверхностью; таким образом,

$$\int_{r=2M} |g_{tt}g_{\theta\theta}g_{\phi\phi}|^{1/2} dt d\theta d\phi = 0, \quad (31.8)$$

$$\int_{(r=2M, t=\text{const})} |g_{\theta\theta}g_{\phi\phi}|^{1/2} d\theta d\phi = 4\pi (2M)^2.$$

Расходимость g_{rr} при $r = 2M$ не означает, что $r = 2M$ находится бесконечно далеко от других областей пространства-времени.

¹⁾ Система отсчета, в которой в выражении (31.4) координата r рассматривается как временная, а t — как пространственная при $r < 2M$, исследуется в работе [491]. — Прим. ред.

1) t и r меняются ролями как времениподобная и пространственноподобная координаты

2) область $r = 2M$, $-\infty < t < +\infty$, является двумерной, а не трехмерной

Напротив, собственное расстояние от $r = 2M$ до точки с произвольным r дается формулой

$$\int_{2M}^r |g_{rr}|^{1/2} dr = \begin{cases} [r(r-2M)]^{1/2} + 2M \ln |(r/2M-1)^{1/2} + (r/2M)^{1/2}| & \text{при } r > 2M, \\ -2M \operatorname{arctg} [r^{1/2}/(2M-r)^{1/2}] - [r(2M-r)]^{1/2} & \text{при } r < 2M; \end{cases} \quad (31.9)$$

это расстояние конечно для любых $0 < r < \infty$.

Как именно область $r < 2M$ физически связана с областью $r > 2M$, можно установить, изучив радиальные геодезические в шварцшильдовской метрике. Для конкретности сосредоточим внимание на траектории пробной частицы, которая выбрасывается из сингулярности при $r = 0$, летит по радиусу наружу, пересекая $r = 2M$, достигает максимального радиуса $r_{\text{макс}}$ («наивысшая точка орбиты») в момент собственного времени $\tau = 0$ и координатного времени $t = 0$, а затем падает вниз к $r = 0$, снова пересекая $r = 2M$. Решение уравнения для такой геодезической орбиты получено в § 25.5 и приведено на фиг. 25.3. Решение имеет «форму циклоиды» (с параметром η , пробегающим интервал значений от $-\pi$ до $+\pi$):

$$r = \frac{1}{2} r_{\text{макс}} (1 + \cos \eta), \quad (31.10a)$$

$$\tau = (r_{\text{макс}}^3/8M)^{1/2} (\eta + \sin \eta), \quad (31.10б)$$

$$t = 2M \ln \left| \frac{(r_{\text{макс}}/2M-1)^{1/2} + \operatorname{tg}(\eta/2)}{(r_{\text{макс}}/2M-1)^{1/2} - \operatorname{tg}(\eta/2)} \right| + \\ + 2M \left(\frac{r_{\text{макс}}}{2M} - 1 \right)^{1/2} \left[\eta + \left(\frac{r_{\text{макс}}}{4M} \right) (\eta + \sin \eta) \right]. \quad (31.10в)$$

На фиг. 31.1 эта орбита нанесена на плоскость координат r, t (кривая $F - F' - F''$); кроме того, приведены некоторые другие типы радиальных геодезических.

Согласно фиг. 31.1 и соответствующим вычислениям, любая радиальная геодезическая, за исключением «множества геодезических меры нуль», пересекает гравитационный радиус при $t = +\infty$ (или при $t = -\infty$, или же и при том и при другом значении t) (упражнения для студентов! См. гл. 25). Таким образом, можно подозревать, что все физические явления, происходящие на гравитационном радиусе, относятся к $t = \pm \infty$ по причине несколько неудачного выбора шварцшильдовских координат. Возникает надежда, что более удачно выбранная система координат охватит и эти две «точки на бесконечности», развернув каждую из них в линию на новой плоскости $(r_{\text{нов}}, t_{\text{нов}})$, и что эта новая система координат сожмет «линию» ($r = 2M, t$ от $-\infty$ до $+\infty$)

3) радиальные геодезические показывают, что области $r = 2M, t = \pm \infty$, являются «конечными» частями пространства-времени

в одну точку на той же плоскости $(r_{\text{нов}}, t_{\text{нов}})$. Читатель вполне подготовлен к восприятию этого интуитивного заключения и к использованию его в работе, так как уже было показано [уравнение (31.8)], что область, покрывающая 2-сферу (θ, ϕ) при $r = 2M$ и простирающаяся от $t = -\infty$ до $t = +\infty$, имеет собственный объем, равный нулю. Можно ли желать более явного указания на то, что «линия» $r = 2M$, $-\infty < t < \infty$, на самом деле является точкой?

§ 31.4. НЕКОТОРЫЕ СИСТЕМЫ КООРДИНАТ, НЕ ИМЕЮЩИЕ ОСОБЕННОСТИ

Из всех систем координат, не имеющих координатной сингулярности, наиболее наглядной является система, относительно которой пробные частицы, движущиеся радиально, согласно уравнениям (31.10), всегда находятся в состоянии покоя («сопутствующие координаты»). Впервые такие координаты использовал Новиков [43]. Каждой пробной частице, вылетающей из сингулярности при $r = 0$, где действуют бесконечные приливные силы, Новиков приписывает в своей системе координат специальное значение радиальной координаты R^* и требует, чтобы это значение R^* сохранялось на протяжении всей «циклоидальной жизни» частицы: частица движется вверх, пересекает $r = 2M$, достигает $r = r_{\text{макс}}$, затем вновь падает вниз, пересекает $r = 2M$ и достигает $r = 0$. Для определенности Новиков выражает значение R^* , связанное с каждой частицей, через значение радиуса в наивысшей точке траектории этой частицы, используя формулу

$$R^* = (r_{\text{макс}}/2M - 1)^{1/2}. \quad (31.11)$$

В качестве временной координаты Новиков использует собственное время пробной частицы τ , причем за начало отсчета $\tau = 0$ принимается та же наивысшая точка траектории. Каждая частица выбрасывается из сингулярности таким образом, чтобы она достигла вершины своей траектории ($r = r_{\text{макс}}$, $\tau = 0$) в тот же момент шварцшильдовского координатного времени, что и все остальные частицы, а именно в момент $t = 0$.

Хотя координаты Новикова в принципе просты, но преобразование, которое связывает их с первоначальными шварцшильдовскими координатами, является весьма сложным. Проводя это преобразование, нужно 1) объединить уравнения (31.10б) и (31.11) для получения $\eta(\tau, R^*)$, 2) объединить $\eta(\tau, R^*)$ с (31.10а) и (31.11) для получения $r(\tau, R^*)$ и, наконец, 3) объединить $\eta(\tau, R^*)$ с (31.10в) и (31.11) для получения $t(\tau, R^*)$. Окончательное координатное преобразование метрики Шварцшильда (31.1) приводит к линейному элементу вида

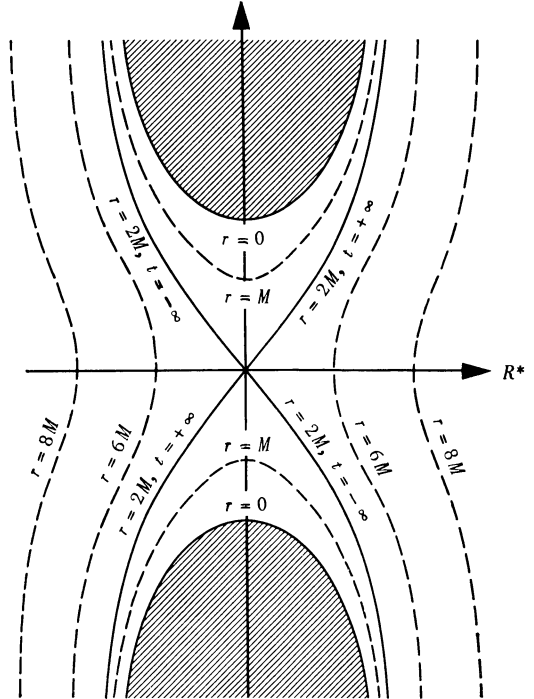
$$ds^2 = -d\tau^2 + \left(\frac{R^{*2} + 1}{R^{*2}} \right) \left(\frac{\partial r}{\partial R^*} \right)^2 dR^{*2} + r^2 (d\theta^2 + \sin^2 \theta d\phi^2) \quad (31.12a)$$

Координаты
Новикова:
1) как они
строятся

2) линейный
элемент

ФИГ. 31.2.

Система координат Новикова для пространства-времени Шварцшильда (схематическое изображение). Пунктирные кривые являются кривыми постоянного радиуса r ($4\pi r^2$ — площадь поверхности вокруг центра симметрии). Заштрихованная область не является частью пространства-времени; она соответствует $r < 0$, т. е. недостижима из-за сингулярности пространства-времени при $r = 0$. Заметим, что «линия» ($r = 2M$, $-\infty < t < +\infty$) на шварцшильдовской координатной диаграмме (фиг. 31.1) сжалась здесь в точку (см. конец § 31.3).



(геометрия Шварцшильда в координатах Новикова). Здесь r уже не является радиальной координатой; теперь это метрическая функция $r(\tau, R^*)$, заданная в неявном виде уравнением

$$\frac{\tau}{2M} = \pm (R^{*2} + 1) \left[\frac{r}{2M} - \frac{(r/2M)^2}{R^{*2} + 1} \right]^{1/2} + (R^{*2} + 1)^{3/2} \arccos \left[\left(\frac{r/2M}{R^{*2} + 1} \right)^{1/2} \right]. \quad (31.126)$$

На фиг. 31.2 показано положение некоторых основных областей шварцшильдовской геометрии пространства-времени в этой системе координат. В § 31.5 рассматривается существование двух отдельных областей с $r = 0$ (сингулярностей) и двух отдельных областей с $r \rightarrow \infty$ (асимптотически плоских областей; напомним, что $4\pi r^2$ — площадь сферы!).

Хотя сама концепция системы координат Новикова очень проста, математические выражения для метрических компонент в этой системе довольно громоздки. Более простые выражения, которые легче использовать, были получены в иной системе координат (в «координатах Крускала — Шекереса»), предложенной Крускалом [41] и независимо от него Шекересом [42].

Крускал и Шекерес используют безразмерную радиальную координату u и безразмерную временную координату v ; эти коор-

Координаты
Крускала —
Шекереса