

Купить книгу "Гравитация. Том 1"

Ч. МИЗНЕР

К. ТОРН

ДЖ. УИЛЕР

ГРАВИТАЦИЯ

1

ИЗДАТЕЛЬСТВО
МИР

1. ГЕОМЕТРОДИНАМИКА В КРАТКОМ ИЗЛОЖЕНИИ

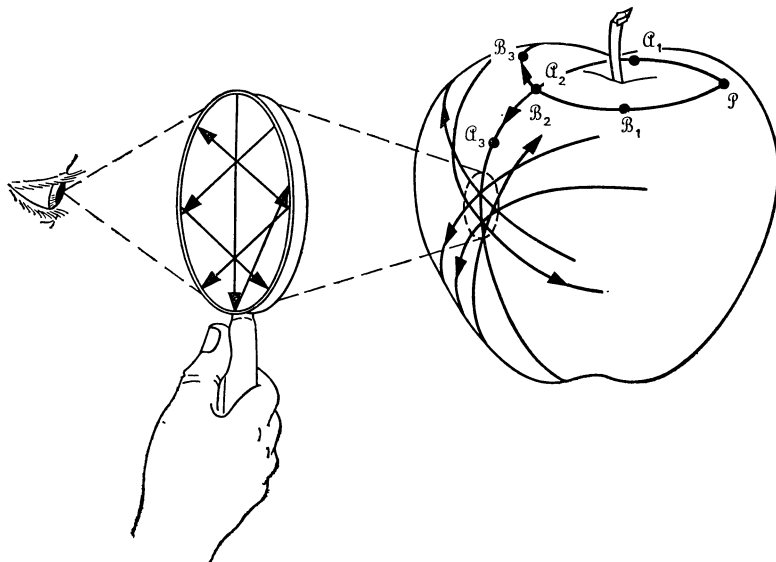
§ 1.1. ПРИТЧА О ЯБЛОКЕ

Однажды в 1666 г. Ньютон оказался за городом и, увидев, как упало яблоко (об этом мне рассказала его племянница), погрузился в глубокие размышления о той причине, по которой все предметы увлекаются в направлении, почти точно совпадающем с направлением к центру Земли.

ВОЛЬТЕР (1738 г.)

Однажды в саду под яблоней лежал студент и размышлял о том, как по-разному понимали гравитацию Ньютон и Эйнштейн. Неожиданно он вздрогнул: рядом упало яблоко. Студент взглянул на него и заметил, как по его поверхности забегали муравьи (фиг. 1.1). Ему стало любопытно, и он решил выяснить, по какому принципу муравьи выбирают свой путь. Воспользовавшись увеличительным стеклом, он тщательно отметил путь одного муравья и, отступив от него в каждую сторону по миллиметру, сделал ножом два параллельных надреза на яблочной кожуре. Затем он снял получившуюся дорожку из кожуры и разложил ее на своей книге. Теперь путь муравья на этой дорожке был прямым, словно луч лазера. Невозможно было отыскать более экономного пути для преодоления тех десяти сантиметров, которые разделяли начало и конец вырезанной полоски яблочной кожуры. Любой зигзаг или плавный поворот при движении муравья по яблочной кожуре между начальной и конечной точками увеличил бы длину его пути.

«Какая прекрасная геодезическая», — отметил студент.



ФИГ. 1.1.

Здесь риманова геометрия пространства-времени общей теории относительности символически представлена в виде двумерной геометрии на поверхности яблока. Геодезические, вдоль которых по поверхности яблока ползают муравьи, являются символическим изображением мировых линий, вдоль которых в пространстве-времени движутся свободные частицы. В любой достаточно малой области пространства-времени геометрию можно приблизительно считать плоской, и на двумерной поверхности яблока это представлено почти прямолинейными отрезками геодезических, хорошо видимыми через увеличительное стекло («локально лоренцев характер» геометрии пространства-времени). В более протяженных областях проявляется кривизна многообразия (четырёхмерного пространства-времени в случае реального физического мира; криволинейной двумерной геометрии в случае яблока). Две геодезические $\mathcal{A}$ и $\mathcal{B}$, выходящие под некоторым углом друг к другу из одной точки $\mathcal{P}$, начинают сближаться, затем пересекаются и расходятся в совершенно различных направлениях. В теории Ньютона этот эффект приписывается гравитационному воздействию на расстоянии со стороны центра притяжения, который символически представлен здесь черенком яблока. Согласно Эйнштейну, траектория частицы определяется локальной геометрией пространства-времени в том месте, где она находится. «Указания» геометрии очень просты: двигаться как можно прямее (по геодезической). Локально физика настолько проста, насколько это вообще возможно. Траектории пересекаются только вследствие кривизны пространства-времени в больших масштабах. Короче говоря, геометродинамика включает два момента: воздействие геометрии на материю (приводящее к пересечению первоначально расходящихся геодезических) и воздействие материи на геометрию (искривление пространства-времени из-за наличия концентрации массы, символически представленное искривлённой поверхностью яблока вблизи черенка).

Его взгляд упал на двух муравьев, отправившихся из одной и той же точки $\mathcal{P}$ в направлениях, слегка отличающихся друг от друга. На этот раз их пути случайно пролегли вблизи углубления в верхней части яблока, причем по разные стороны от него. Каждый из муравьев добросовестно следовал вдоль своей геодезической. Каждый старался бежать по яблочной кожуре как можно прямее. Однако из-за собственной кривизны углубления их пути сначала пересеклись, а затем разошлись в совершенно разных направлениях.

«Можно ли придумать более удачную иллюстрацию для геометрической теории тяготения Эйнштейна? — задумчиво произнес студент. — Муравьи движутся так, будто их притягивает к яблочному черенку. Можно было бы поверить и в ньютоновскую силу, действующую на расстоянии. Но муравью нечем руководствоваться при выборе своего пути, кроме локальной геометрии поверхности, по которой он ползет. А это, безусловно, и есть концепция Эйнштейна, подразумевающая, что причиной всех физических явлений является локальное воздействие. И как она отличается от ньютоновского подхода в физике с его «дальнодействием»! Теперь я гораздо лучше понимаю, о чем говорится в этой книге».

Сказав это, он открыл свою книгу и прочел: «Не пытайтесь описывать движение по отношению к удаленным объектам. *Физика проста только при локальном анализе.* А локально мировая линия, вдоль которой движется спутник (в пространстве-времени, вокруг Земли), уже является прямой, насколько мировая линия вообще может быть прямой. Забудьте все эти разговоры об «отклонении» от прямолинейного движения и «силе тяготения». Я нахожусь в космическом корабле. Или плаваю в космосе около него. Разве я чувствую какую-либо «силу гравитации»? Ничего подобного. Чувствует ли эту силу корабль? Нет. Тогда зачем говорить о ней? Считайте, что и корабль, и я пересекаем область пространства-времени, в которой не действуют никакие силы. Считайте, что движение в этой области уже является идеально прямым».

Послышался сигнал к обеду, но студент все еще сидел, рассуждая про себя. «Мне кажется, что суть эйнштейновской геометрической теории тяготения можно кратко выразить в виде трех положений: 1) локально геодезические кажутся прямыми; 2) в более обширных областях пространства-времени те геодезические, которые сначала расходятся, начинают впоследствии сближаться со скоростью, определяемой кривизной пространства-времени, и это влияние геометрии на материю и есть то, что мы сегодня подразумеваем под старым словом «тяготение»; 3) материя в свою очередь деформирует геометрию. Углубление на поверхности яблока возникает потому, что там есть черенок. Я думаю, что все это можно выразить еще более кратко: *Пространство воздействует на материю, «указывая» ей, как двигаться. Материя в свою очередь оказывает обратное действие на пространство,*

Локальное понимание физики Эйнштейна и ньютоновское «действие на расстоянии»

Физика проста только при локальном анализе

Пространство указывает материи, как двигаться

Материя указывает пространству, как искривляться

«указывая» ему, как искривляться. Другими словами, наличие материи в данном месте,— сказал он, вставая и поднимая за черенок яблоко,— приводит к кривизне пространства в этом месте. Чтобы искривить пространство в данном месте, его необходимо искривить и в соседних областях,— продолжал он, наблюдая за замешкавшимся муравьем, деловито следующим вдоль своей геодезической на расстоянии толщины пальца от черенка.— Так материя в данном месте оказывает влияние на материю в другом месте. Это и есть объяснение «гравитации», данное Эйнштейном.

Обеденный сигнал затих, и он ушел, унеся с собой книгу, увеличительное стекло — и яблоко.

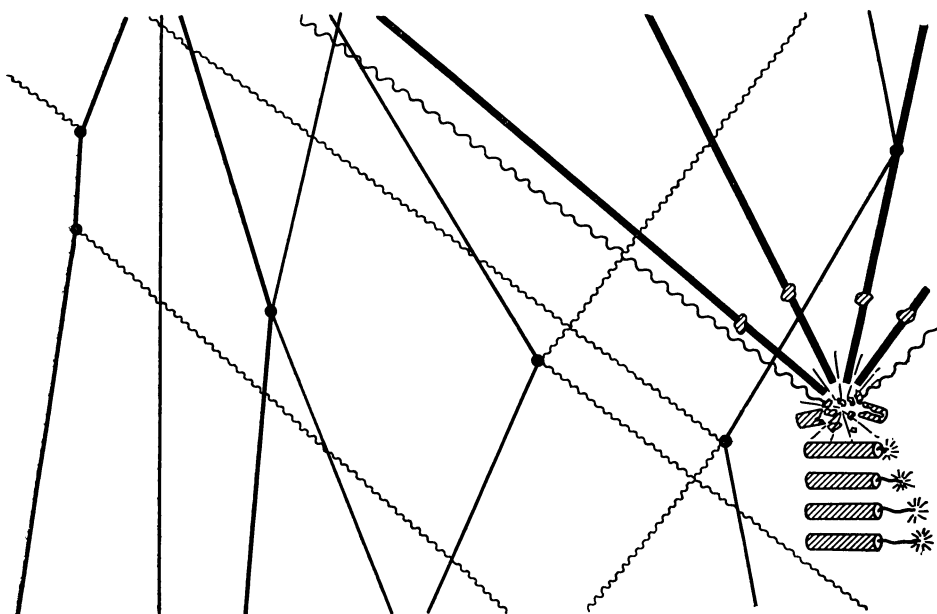
§ 1.2. ПРОСТРАНСТВО-ВРЕМЯ С КООРДИНАТАМИ И БЕЗ НИХ

И вот мне пришло в голову: ... тот факт, что ускорение свободного падения не зависит от природы падающего вещества, допускает следующее толкование: в поле тяготения (малой пространственной протяженности) все происходит так, как в пространстве без тяготения... Это произошло в 1908 г. Почему понадобилось еще семь лет, чтобы построить общую теорию относительности? Главная причина заключается в том, что не так легко освободиться от представления, что координаты имеют прямой метрический смысл.

А ЭЙНШТЕЙН [77]

Проблема
как проводить
измерения
в искривленном
пространстве-
времени

При первом знакомстве с понятием «искривленного пространства-времени» ничто так не удручает, как боязнь того, что в этой незнакомой ситуации все простые методы измерения уже неприменимы. Чувствуешь себя так, будто тебе нужно обмерить гигантский айсберг причудливой формы, и ты стоишь с метром в руках в плюшке, которую бросает из стороны в сторону на океанских волнах. Вот если бы нужно было обмерить форму самой плюшки, то это не представляло бы особого труда. Мы вытащили бы ее на берег, перевернули и вбили в опорных точках по всей поверхности гвоздики. Измерив расстояния между гвоздиками, мы получили бы форму всей поверхности. Увеличивая число гвоздиков, можно выполнить это с любой точностью. Требуется куда больше смелости, чтобы решиться забить несколько десятков крюков для разметки огромного айсберга. Однако при всей смелости как можно забить гвоздь в пространство-время, чтобы отметить в нем какую-либо точку? К счастью, как впервые подчеркнул Эйнштейн, у природы есть свой способ локализации точек в пространстве-



ФИГ. 1.2.

Пересечение соломинок на сеновале, наполненном сеном, символизирует мировые линии, заполняющие пространство-время. Пересечения и искривления этих мировых линий однозначно определяют события, и координатных систем и координат не требуется. Типичные события (черные точки), символически изображенные на фигуре, представляют собой (слева направо): поглощение фотона, переизлучение фотона, столкновение двух частиц, столкновение частицы и фотона, еще одно столкновение частицы и фотона, взрыв хлопушки, столкновение внешней частицы с осколком хлопушки.

времени. Будем характеризовать точку тем, что в ней происходит! Назовем точку пространства-времени «событием». Точка, где расположено событие, определена так же четко и ясно, как точка пересечения двух соломинок на сеновале, доверху наполненном сеном (фиг. 1.2). Для идентификации достаточно сказать, что событие соответствует столкновению такого-то фотона с такой-то частицей. Мировые линии этого фотона и этой частицы выходят из прошлого и уходят в будущее. У них густая сеть связей с близлежащими мировыми линиями, которые в свою очередь множеством способов связаны с более отдаленными. Как же тогда объяснить положение события? Сначала укажите, какие мировые линии участвуют в событии. Затем проследите ход каждой из них. Назовите другие события, которые на них встречаются. В конце концов можно упорядочить весь сеновал. У каждого события теперь есть наименование. Найти нужное пересечение теперь так же легко, как коренному лондонцу легко найти дорогу на угол улиц Сент-

Решение:
охарактеризуем
события тем,
что в них
происходит

Джеймс и Пикадилли. Никаких номеров. Никакой координатной системы. Никаких координат.

Тот факт, что большинство улиц в Японии не имеет названий, а большинство домов — номеров, демонстрирует нашу способность обходиться без координат. Можно отказаться от обозначения события путем указания двух мировых линий, на пересечении которых оно находится. Точно так же, как в Японии можно найти дом по имени его хозяина, определенным событиям в пространстве-времени можно давать произвольные наименования, как это часто и делается (дополнение 1.1).

Но удобнее все-таки пользоваться координатами. Разве есть какой-либо иной способ легко определить (когда перед вами лежит огромный и толстый каталог хаотически расположенных событий), что на данной мировой линии сначала столкнешься с событием Тринити, затем Бэйкер, потом Майк, потом Аргус, а, скажем, не с теми же событиями, но в другом порядке?

Чтобы упорядочить события, введем координаты (фиг. 1.3) Координаты — это четыре числа с индексами, поставленные в соответствие событию в пространстве-времени; на листе бумаги — только два числа. У события Тринити появляются координаты

$$(x^0, x^1, x^2, x^3) = (77, 23, 64, 14).$$

Когда событиям дают координатные наименования, процесс измерения отходит на задний план и требуется лишь выполнение гладкости. Четыре числа, соответствующие событию, есть не что иное, как своего рода усовершенствованный телефонный номер. Путем сравнения «телефонных номеров» вы можете узнать, являются ли два события близкими. Но даже не пытайтесь по разнице в телефонных номерах выяснить, сколько метров разделяет эти события!

Так же, как никто не мешает абонентам пользоваться услугами различных конкурирующих телефонных сетей, так и события можно описывать в различных системах координат (фиг. 1.3). В дополнении 1.1 демонстрируются соотношения между различными системами координат, а также используемая система обозначений для координат и их преобразований.

Выберем два события, являющихся близкими, о чем мы можем судить по близости значений их координат в некоторой гладкой координатной системе. Нарисуем маленькую стрелку, направленную от одного из них к другому. Такая стрелка называется *вектором*. (Это понятие хорошо определено для плоского пространства-времени или для искривленного пространства-времени в пределе бесконечно малой длины; в случае конечной длины в искривленном пространстве-времени ему надо дать более строгое и точное определение, после чего оно появляется под названием «касательный вектор», см. гл. 9.) Вектору, так же как и событиям, можно дать наименование. Но назовем ли мы его Джон, Чарлз или Кип, он остается строго и однозначно определенным гео-

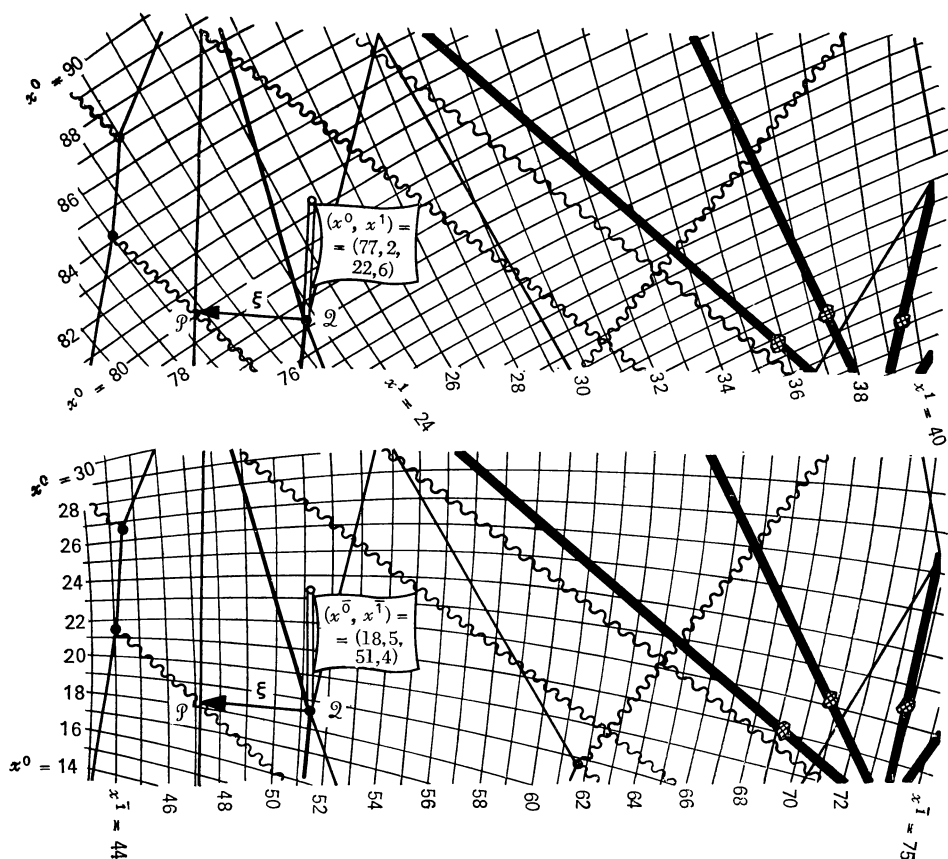
Наименование
события может
быть любым

Координаты —
удобный способ
давать
наименования

В общем случае
координаты
не являются
мерой длины

Можно
одновременно
пользоваться
различными
системами
координат

Векторы



ФИГ. 1.3.

Вверху. Событиям сообщаются «телефонные номера» посредством системы координат. Когда говорят, что система координат «гладкая», имеют в виду, что близкие события имеют близкие значения координат. *Внизу.* Те же самые события упорядочены иным образом с помощью другой системы координат. Здесь выбраны два конкретных соседних события: событие $\mathcal{A}$ с координатами $(x^0, x^1) = (77, 2, 22, 6)$ и $(\bar{x}^0, \bar{x}^1) = (18, 5, 51, 4)$ и событие $\mathcal{P}$ с координатами $(x^0, x^1) = (79, 9, 20, 1)$ и $(\bar{x}^0, \bar{x}^1) = (18, 4, 47, 1)$. Между событиями $\mathcal{A}$ и $\mathcal{P}$ лежит «вектор» ξ , который их разделяет. [Для точного определения вектора в искривленном пространстве-времени требуется перейти к пределу, когда две точки бесконечно приближаются друг к другу (разность $\mathcal{P} - \mathcal{A}$ уменьшается в N раз), с последующим умножением этой разности на N , но уже в локально плоском пространстве, получившемся в результате этой процедуры ($\lim N \rightarrow \infty$; «касательное пространство», «касательный вектор»). Здесь мы отказываемся от абсолютной строгости, поэтому слово «вектор» взято в кавычки.] В каждой системе координат разделяющий вектор ξ характеризуется «компонентами» (разностью значений координат событий $\mathcal{P}$ и $\mathcal{A}$):

$$(\xi^0, \xi^1) = (79, 9 - 77, 2, 20, 1 - 22, 6) = (2, 7, -2, 5),$$

$$(\bar{\xi}^0, \bar{\xi}^1) = (18, 4 - 18, 5, 47, 1 - 51, 4) = (-0, 1, -4, 3).$$

Подробнее о событиях, координатах и векторах см. дополнение 1.1.

ФИГ. 1.4.

Как возникает чисто координатная сингулярность. *Вверху.* Система координат становится *сингулярной*, когда «ячейки в коробке для яиц» сплющиваются до нулевого объема. *Внизу.* Пример, демонстрирующий такого рода сингулярность в шварцшильдовских координатах r , t , часто используемых для описания геометрии в окрестности черных дыр (гл. 31). Угловые координаты θ , ϕ для простоты опущены. Сингулярность проявляется в двух аспектах. Во-первых, все точки вдоль пунктирной линии, будучи совершенно различными, обозначены одной и той же парой значений (r, t) , а именно $r = 2m$, $t = \infty$. Координаты не дают возможности различить эти точки. Во-вторых, «ячейки для яиц», одна из которых на рисунке заштрихована, вдоль пунктирной линии сжаты до нулевого объема. В итоге можно сказать, что в самой геометрии на пунктирной линии нет ничего особенного: вся сингулярность заключается в системе координат («плохая система телефонных номеров»). То случайное обстоятельство, что координата t обращается в бесконечность на пунктирной линии, не должно приводить к путанице. От этой бесконечности можно избавиться, если вместо t ввести новую координату $\bar{t}$, определяемую соотношением

$$(t/2m) = \operatorname{tg} (\bar{t}/2m).$$

Когда $t = \infty$, новая координата $\bar{t}$ равна πm . Однако координаты r , $\bar{t}$ не позволяют различать точки вдоль пунктирной линии. Они также приводят к сжатым до нулевого объема «ячейкам в коробке для яиц».

метрическим объектом. Имя дается ради удобства, но вектор существует и без него.

Точно так же, как четверка координат

$$(x^0, x^1, x^2, x^3) = (77, 23, 64, 11)$$

является крайне удобным наименованием для события Тринити (по нему можно судить о том, какие события находятся поблизости), так и четверка «компонент»

$$(\xi^0, \xi^1, \xi^2, \xi^3) = (1, 2, -0,9, 0, 2, 1)$$

является удобным наименованием для вектора Джон, который выходит из точки

$$(x^0, x^1, x^2, x^3) = (77, 23, 64, 11)$$

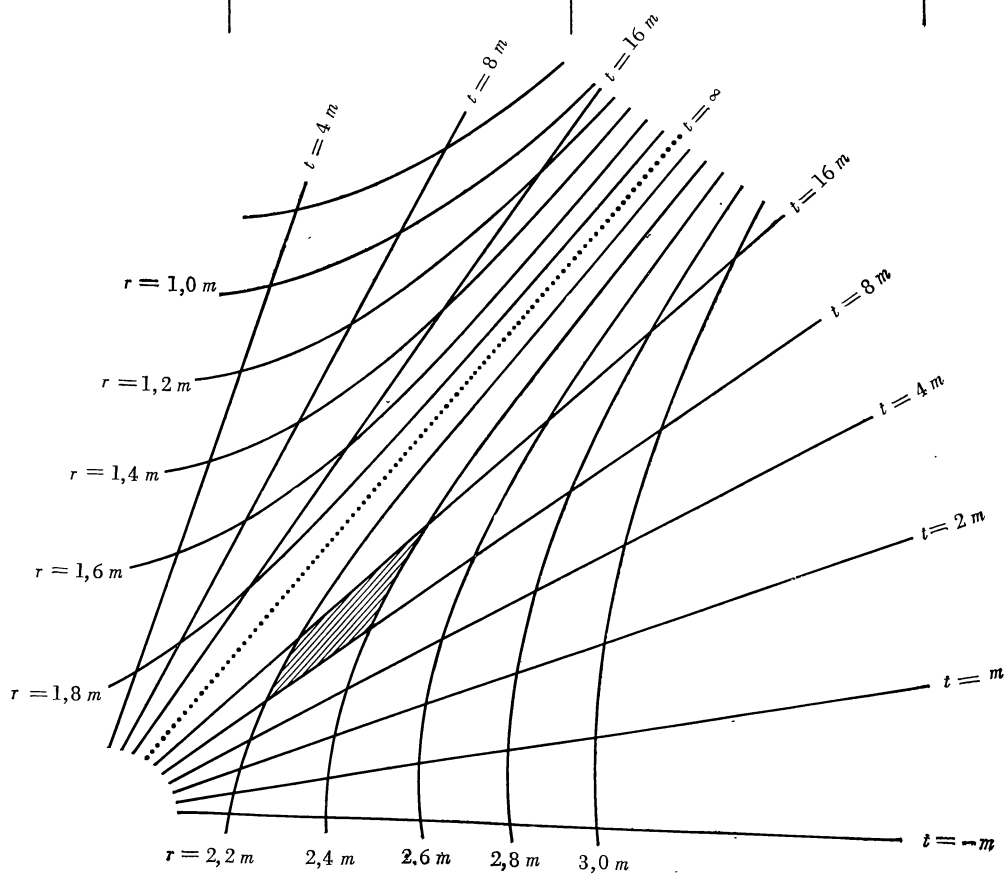
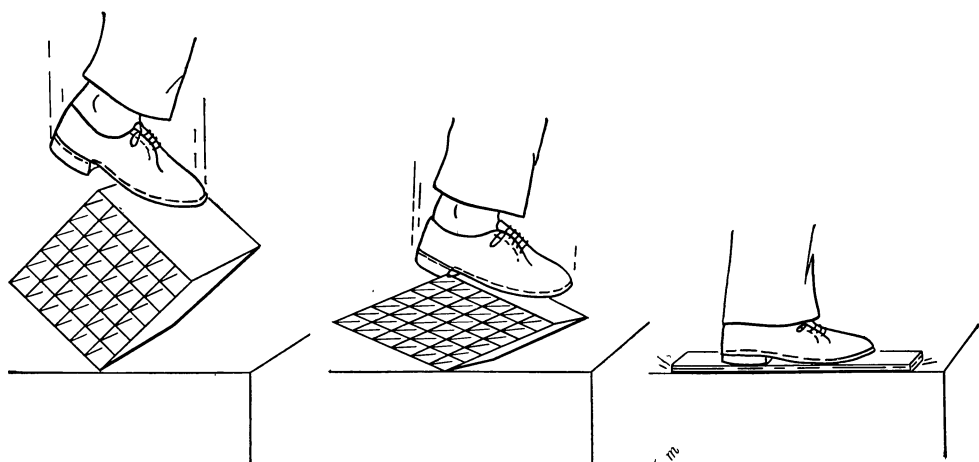
и направлен в точку

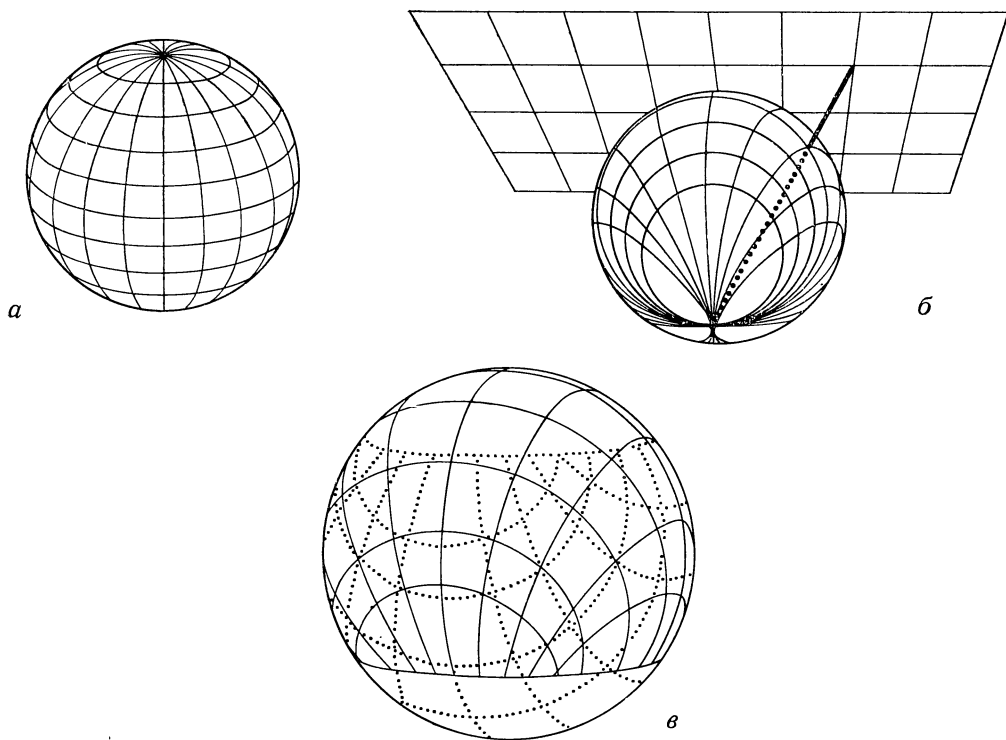
$$(x^0, x^1, x^2, x^3) = (78, 2, 22, 1, 64, 0, 13, 1).$$

О том, как обращаться с компонентами вектора, сказано в дополнении 1.1.

Система координат может быть несовершенной во многих отношениях. Пример координатной сингулярности приведен на фиг. 1.4. Еще один пример координатной сингулярности — Северный полюс на поверхности глобуса. Обратите внимание, как в нем сходятся все меридианы («сжатие ячеек в коробке для яиц до нулевого объема»). Нельзя ли придумать нечто более совершенное? Например, ввести на всем глобусе единую систему координат, у которой нет сингулярностей. Существует теорема, дающая

Как правило,
нельзя избежать
координатных
сингулярностей





ФИГ. 1.5.

Для хорошо известной системы координат на двумерной сфере можно избежать сингулярности, если покрыть сферу двумя перекрывающимися координатными листами. *а* — сферические полярные координаты, сингулярные на Северном и Южном полюсах и претерпевающие разрыв на линии перемены даты. *б* — проекция на сферу эвклидовых координат двумерной эвклидовой плоскости, касающейся сферы на Северном полюсе. Проекция построена посредством луча, проходящего через Южный полюс, на котором и появляется координатная сингулярность. *в* — покрытие двумерной сферы двумя перекрывающимися координатными листами. Один из них, построенный аналогично случаю *б*, покрывает северную полусферу с южными тропиками вплоть до тропика Козерога, и не содержит сингулярностей. Другой покрывает все тропики и южную полусферу и тоже не имеет сингулярностей.

отрицательный ответ. Нужно как минимум два «координатных листа», чтобы охватить всю двумерную сферу без сингулярностей (фиг. 1.5). Это обстоятельство по-иному освещает тот факт, что точки и события первичны, а координаты — всего лишь система учета.

На фиг. 1.2 и 1.3 показано лишь несколько событий и мировых линий. На более подробном рисунке мы увидели бы целый лабиринт мировых линий, световых лучей и их пересечений. Отталкиваясь от такой картины, можно умоглядно перейти к идеали-

зированной предельному случаю бесконечно густой сети световых лучей и мировых линий бесконечно малых пробных частиц. Этому идеализированному предельному случаю в физике однозначно соответствует математическое понятие непрерывного четырехмерного «многообразия» (четырёхмерного пространства с определенными свойствами гладкости), и в этом предельном случае используются непрерывные, дифференцируемые (т.е. гладкие) системы координат. Таким образом, математика дает тот инструмент, с помощью которого мы рассуждаем в физике.

Размерность многообразия можно определить путем простого подсчета. Возьмем точку P в n -мерном многообразии. Ее окрестностью является n -мерный шар (т. е. внутренность сферы, поверхность которой имеет $n - 1$ измерение). Выберем этот шар таким образом, чтобы его граница была гладким многообразием. Размерность этого многообразия равна $n - 1$. В этом $(n - 1)$ -мерном многообразии выберем точку Q . Ее окрестностью является $(n - 1)$ -мерный шар. Выберем этот шар таким образом, ..., и т. д. В конце концов путем таких построений мы придем к двумерному многообразию, не зная еще, что оно двумерно (двумерная сфера). В этом двумерном многообразии выберем точку M . Ее окрестностью является двумерный шар («диск»). Выберем этот диск таким образом, чтобы его граница была гладким многообразием (окружностью). В этом многообразии выберем точку N . Ее окрестностью является одномерный шар, но мы еще не знаем, что он одномерен («отрезок линии»). Граница этого объекта состоит лишь из двух точек. Это обстоятельство позволяет заключить, что находящееся внутри многообразие одномерно; следовательно, предыдущее многообразие было двумерным и т. д. Размерность первоначального многообразия равна числу точек, использованных при построении. Размерность пространства-времени равна 4.

Такого рода математические рассуждения о размерности вполне оправдывают себя в обиходной шкале расстояний, на уровне размеров атома (10^{-8} см), ядра (10^{-13} см) и даже расстояний на несколько порядков меньших, если судить по тому, насколько совпадают предсказания квантовой электродинамики с наблюдениями при высоких энергиях (соответствующих дебройлевской длине волны 10^{-16} см). Более того, классическая общая теория относительности рассматривает многообразие пространства-времени как детерминированную структуру, абсолютно строго определенную вплоть до сколь угодно малых расстояний. Совсем не так обстоят дела в квантовой общей теории относительности, или в «квантовой геометродинамике». Она предсказывает сильные флуктуации геометрии на расстояниях порядка планковской длины

Математическая теория многообразий в приложении к физике пространства-времени

Размерность пространства-времени

Нарушение гладкости пространства-времени на расстояниях порядка планковской длины

$$L^* = (\hbar G/c^3)^{1/2} = [(1,054 \cdot 10^{-27} \text{ г} \cdot \text{см}^2/\text{с}) (6,670 \cdot 10^{-8} \text{ см}^3/\text{г} \cdot \text{с}^2)]^{1/2} \times (2,998 \cdot 10^{10} \text{ см/с})^{-3/2} = 1,616 \cdot 10^{-33} \text{ см.} \quad (1.1)$$