

Купить книгу "Гравитация. Том 2"

Ч. МИЗНЕР

К. ТОРН

ДЖ. УИЛЕР

ГРАВИТАЦИЯ

2

ИЗДАТЕЛЬСТВО
МИР

16. ПРИНЦИП ЭКВИВАЛЕНТНОСТИ И ИЗМЕРЕНИЕ «ГРАВИТАЦИОННОГО ПОЛЯ»

*Вместо одной глобальной системы отсчета
с гравитационными силами мы имеем много
локальных систем отсчета без гравитационных сил.*

СТЕФАН ШУТЦ, 1966 г.¹⁾

§ 16.1. ПРЕДВАРИТЕЛЬНЫЕ ЗАМЕЧАНИЯ

Теперь, когда мы твердо овладели математикой искривленного пространства-времени, у нас появилось желание броситься, очертя голову, в детальное изучение эйнштейновских уравнений поля. Однако еще на некоторое время следует устоять от такого соблазна. Чтобы полностью усвоить уравнения поля, необходимо прежде всего понять, как изменяются (или не изменяются) классические законы физики при переходе от плоского к искривленному пространству (§ 16.2 и 16.3); затем необходимо понять, как можно «измерить» (§ 16.4 и 16.5) «гравитационное поле» (метрику, ковариантную производную, кривизну пространства-времени,...).

Цель этой главы

§ 16.2. ЗАКОНЫ ФИЗИКИ В ИСКРИВЛЕННОМ ПРОСТРАНСТВЕ-ВРЕМЕНИ

В любом месте и в любой момент времени можно ввести локально инерциальную систему отсчета, в которой все пробные частицы движутся по прямым линиям. Более того, эта локально инерциальная система отсчета будет также локально лоренцевой: скорость света в ней имеет стандартное значение и световые лучи, подобно мировым линиям пробных частиц, прямолинейны. Но физика представляет собой нечто большее — в ней мало описать только движения пробных частиц и световых лучей. Важно понять, как изменяются уравнения Максвелла, законы гидродинамики,

¹⁾ Цитируется его утверждение на последнем экзамене по курсу теории относительности, Принстонский университет.

Принцип
эквивалентности
Эйнштейна

принципы атомной структуры и вся остальная физика в «сильных гравитационных полях».

Ответ прост: *В любой локально лоренцевой системе отсчета, в любой момент времени и в любом месте Вселенной все (негравитационные) законы физики должны принимать тот вид, который они имеют в специальной теории относительности.* Иначе говоря, невозможно посредством экспериментов, проводимых в бесконечно малых областях пространства-времени, отличить одну локально лоренцеву систему отсчета в этой области пространства-времени от другой локально лоренцевой системы отсчета в той же или любой другой области. Это и есть принцип эквивалентности Эйнштейна в сильнейшей форме — принцип, который непоколебим как философски, так и экспериментально (соответствующие эксперименты см. в § 38.6).

Принцип
эквивалентности
как связующее
звено между
негравитационны-
ми законами
и гравитацией

Принцип эквивалентности имеет огромную силу. С его помощью можно обобщить все физические законы специальной теории относительности на случай искривленного пространства-времени, причем кривизна не обязательно должна быть малой. Она может быть столь же велика, как и кривизна в центре нейтронной звезды или кривизна на краю черной дыры. Фактически кривизна может быть произвольно велика или почти произвольно велика. Лишь в конечной точке гравитационного коллапса или в начальный момент «большого взрыва», т. е. только в «сингулярностях пространства-времени» будут нарушаться условия непосредственной применимости принципа эквивалентности (см. § 28.3, 34.6, 43.3, 43.4 и гл. 44)¹⁾. Во всех других случаях принцип эквивалентности служит связующим звеном между негравитационными законами физики и гравитацией.

Пример: Сформулируете в гравитационном поле «локальный закон сохранения энергии-импульса», $\nabla \cdot \mathbf{T} = 0$.

Решение

1. В плоском пространстве-времени этот закон, записанный в абстрактной геометрической форме, гласит:

$$\nabla \cdot \mathbf{T} = 0. \quad (16.1a)$$

2. Переписанный в глобально лоренцевой системе отсчета плоского пространства-времени он имеет вид

$$T^{\mu\nu}_{, \nu} = 0. \quad (16.16)$$

3. Применяв принцип эквивалентности, можно записать то же уравнение в локально лоренцевой системе отсчета искривленного

¹⁾ Точнее, в сингулярностях нет регулярного пространства-времени, нет регулярных систем отсчета вообще и принцип эквивалентности просто не к чему применять. — *Прим. ред.*

пространства-времени:

$$T^{\hat{\mu}}{}_{\hat{\nu}}{}_{;\hat{\nu}} = 0 \quad \text{в начале локально лоренцевой системы отсчета.} \quad (16.1\text{в})$$

Поскольку коэффициенты связности в начале локально лоренцевой системы отсчета исчезают, то это можно переписать так:

$$T^{\hat{\mu}}{}_{\hat{\nu}}{}_{;\hat{\nu}} = 0 \quad \text{в начале локально лоренцевой системы отсчета.} \quad (16.1\text{г})$$

4. Полученные уравнения представляют собой локально лоренцевые компоненты следующего геометрического закона в искривленном пространстве-времени:

$$\nabla \cdot \mathbf{T} = 0; \quad (16.1\text{д})$$

последний можно записать в компонентной форме в произвольной системе отсчета

$$T^{\mu\nu}{}_{;\nu} = 0. \quad (16.1\text{е})$$

Сравните абстрактный геометрический закон (16.1д) в искривленном пространстве-времени с соответствующим законом (16.1а) в плоском пространстве-времени. Они тождественны! В том, что это не случайность, можно легко убедиться, применяя вышеприведенное четырехступенчатое доказательство к любому другому закону физики (например, к уравнениям Максвелла $\nabla \cdot \mathbf{F} = 4\pi \mathbf{J}$). *Законы физики, записанные в абстрактной геометрической форме, имеют одинаковый вид в плоском и в искривленном пространстве-времени;* это гарантируется принципом эквивалентности и фактически представляет собой его простую формулировку.

Сравните вид закона $\nabla \cdot \mathbf{T} = 0$, записанного в компонентной форме в произвольной системе отсчета искривленного пространства-времени [уравнение (16.1е)], с соответствующим видом этого закона в глобально лоренцевой системе отсчета плоского пространства-времени [уравнение (16.1б)]. Они отличаются только тем, что запятая (частная производная, градиент в плоском пространстве-времени) заменена точкой с запятой (ковариантная производная, градиент в искривленном пространстве-времени). Такая процедура переписывания уравнений имеет универсальную применимость. *Законы физики, записанные в компонентной форме, при переходе от плоского к искривленному пространству-времени изменяются путем простой замены всех запятых на точки с запятой* (никакого физического или геометрического изменения не происходит, происходит лишь переключение из лоренцевой системы отсчета в нелоренцеву систему отсчета!). Это утверждение, подобно утверждению о неизменности абстрактных геометрических законов, есть не что иное, как перефразированная формулировка принципа эквивалентности.

Правило:
«запятая
переходит в
точку с запятой»

Описанный выше переход в формализме от плоского к искривленному пространству-времени — процедура тривиальная. Однако она не тривиальна в приложениях. Такой подход связывает гравитацию со всеми законами физики, причем гравитация входит главным образом через ковариантные производные искривленного пространства-времени, как это ясно видно из упражнения 16.1.

УПРАЖНЕНИЯ

16.1. Гидродинамика в слабом гравитационном поле

а. В § 18.4 будет показано, что для почти ньютоновской системы, рассматриваемой в соответствующей почти глобально лоренцевой системе координат, метрика имеет вид

$$ds^2 = -(1 + 2\Phi) dt^2 + (1 - 2\Phi) (dx^2 + dy^2 + dz^2), \quad (16.2a)$$

где Φ — ньютоновский потенциал ($-1 \ll \Phi < 0$). Рассмотрите почти ньютоновскую идеальную жидкость с тензором энергии-импульса

$$T^{\alpha\beta} = (\rho + p) u^\alpha u^\beta + p g^{\alpha\beta}, \quad p \ll \rho \quad (16.2b)$$

(см. дополнение 5.1 и § 5.10), движущуюся в таком пространстве-времени с обычной скоростью

$$v^j \equiv dx^j/dt \ll 1. \quad (16.2b)$$

Покажите, что уравнения $T^{\mu\nu}_{;\nu} = 0$ для этой системы сводятся к привычному ньютоновскому закону сохранения массы и ньютоновскому уравнению движения жидкости в гравитационном поле:

$$\frac{d\rho}{dt} = -\rho \frac{\partial v^j}{\partial x^j}, \quad \rho \frac{dv^j}{dt} = -\rho \frac{\partial \Phi}{\partial x^j} - \frac{\partial p}{\partial x^j}, \quad (16.3a)$$

где d/dt означает сопутствующую веществу производную по времени

$$\frac{d}{dt} \equiv \frac{\partial}{\partial t} + v^j \frac{\partial}{\partial x^j}. \quad (16.3b)$$

б. Примените эти уравнения для вычисления градиента давления в земной атмосфере как функции температуры и давления. Используйте в расчетах нерелятивистское соотношение $\rho = n_M \mu_M$, где n_M — число молекул в 1 см^3 и μ_M — средняя масса покоя на одну молекулу, а также используйте уравнение состояния идеального газа

$$p = n_M k T \quad (k \text{ — постоянная Больцмана})$$

и сферически-симметричный вид $\Phi = -M/r$ ньютоновского потенциала Земли. Если давление на уровне моря равно $1,01 \cdot 10^6 \text{ дин/см}^2$, то каково приблизительно давление на вершине горы Эверест (высота 8 840 м)? (Сделайте разумное предположение о распределении температуры в атмосфере.)

16.2. Мировые линии фотонов

УПРАЖНЕНИЯ

Покажите, что в плоском пространстве-времени закон сохранения 4-импульса свободно движущегося фотона можно записать в виде

$$\nabla_{\mu} p^{\mu} = 0. \quad (16.4a)$$

В соответствии с принципом эквивалентности уравнение (16.4a) должно быть справедливо также и в искривленном пространстве-времени. Покажите, что это означает, что фотон движется по нулевым геодезическим искривленного пространства-времени с аффинным параметром λ , связанным с 4-импульсом формулой

$$p^{\mu} = d/d\lambda. \quad (16.4b)$$

В упражнении 18.6 этот результат будет использован для расчета отклонения света Солнцем.

§ 16.3. ПРОБЛЕМА ПОРЯДКА ИНДЕКСОВ В ПРИНЦИПЕ ЭКВИВАЛЕНТНОСТИ

Иногда при применении принципа эквивалентности для перехода от физики в плоском пространстве-времени к физике в искривленном пространстве-времени сталкиваются с «вопросом о порядке индексов» по аналогии с проблемой порядка сомножителей, встающей при переходе от классической механики к квантовой ¹⁾. *Пример:* Как перевести в искривленное пространство-время уравнение (3.56) для векторного электродинамического потенциала? Если в плоском пространстве-времени уравнение записывается в виде

$$-A^{\alpha, \mu}_{;\mu} + A^{\mu}_{;\mu}{}^{\alpha} = 4\pi J^{\alpha},$$

то, согласно правилу «запятая переходит в точку с запятой», оно принимает вид

$$-A^{\alpha; \mu}_{;\mu} + A^{\mu; \mu}{}_{;\mu}{}^{\alpha} = 4\pi J^{\alpha}. \quad (16.5)$$

Однако если в уравнении в плоском пространстве-времени изменить порядок частного дифференцирования, т. е.

$$-A^{\alpha, \mu}_{;\mu} + A^{\mu, \alpha}_{;\mu} = 4\pi J^{\alpha},$$

то оно перейдет в уравнение

$$-A^{\alpha; \mu}_{;\mu} + A^{\mu; \alpha}_{;\mu} = 4\pi J^{\alpha},$$

Проблема порядка индексов и ее связь с кривизной

¹⁾ Обсуждение квантовомеханических проблем порядка сомножителей см., например, в книге Мерцбахера [37], стр. 138, 139 и 334, 335, а также в работе Паули [38].

которое можно переписать так:

$$-A^{\alpha;\mu}_{;\mu} + A^{\mu}_{;\mu}{}^{\alpha} + R^{\alpha}_{\mu} A^{\mu} = 4\pi J^{\alpha}. \quad (16.5')$$

(Тензор Риччи появляется в результате изменения порядка ковариантного дифференцирования, см. упражнение 16.3.) Какое из двух уравнений правильное — (16.5) или (16.5')? Вопрос не тривиален, так же как не тривиальны аналогичные проблемы порядка сомножителей в квантовой теории. Правила «на пальцах», которые разрешают эту и другие проблемы порядка индексов, можно найти в дополнении 16.1. Эти правила гласят, что уравнение (16.5') правильно, а уравнение (16.5) ошибочно (см. дополнение 16.1 и § 22.4).

УПРАЖНЕНИЯ

16.3. Некоммутативность ковариантных производных

Пусть $\mathbf{B}$ — векторное поле и $\mathbf{S}$ — поле тензора второго ранга. Покажите, что

$$B^{\mu}_{;\alpha\beta} = B^{\mu}_{;\beta\alpha} + R^{\mu}_{\nu\beta\alpha} B^{\nu}, \quad (16.6a)$$

$$S^{\mu\nu}_{;\alpha\beta} = S^{\mu\nu}_{;\beta\alpha} + R^{\mu}_{\rho\beta\alpha} S^{\rho\nu} + R^{\nu}_{\rho\beta\alpha} S^{\mu\rho}. \quad (16.6b)$$

Воспользовавшись уравнением (16.6a), покажите также, что

$$B^{\mu;\alpha}_{;\mu} = B^{\mu}_{;\mu}{}^{\alpha} + R^{\alpha}_{\mu} B^{\mu}. \quad (16.6b')$$

[Указание к расчету в рамках курса 1: Работайте в локально лоренцевой системе отсчета, где $\Gamma^{\alpha}_{\beta\gamma} = 0$, но $\Gamma^{\alpha}_{\beta\gamma,\delta} \neq 0$; распишите левую часть, используя символы Кристоффеля и частные производные; примените равенство (8.44) для тензора Римана. Для альтернативного расчета в курсе 2 заметим, что $\nabla_{\beta}\nabla_{\alpha}\mathbf{B}$ нелинейно по $\mathbf{e}_{\alpha}$ и что $B^{\mu}_{;\alpha\beta}$ не являются компонентами этого тензора, а

$$B^{\mu}_{;\alpha\beta} \equiv \nabla\nabla\mathbf{B}(\omega^{\mu}, \mathbf{e}_{\alpha}, \mathbf{e}_{\beta}). \quad (16.7)$$



— тензор третьего ранга

Расчет затем продолжается следующим образом:

$$\begin{aligned} \langle \omega^{\mu}, \nabla_{\beta}\nabla_{\alpha}\mathbf{B} \rangle &= \langle \omega^{\mu}, \nabla_{\beta}(\mathbf{e}_{\alpha} \cdot \nabla\mathbf{B}) \rangle = \langle \omega^{\mu}, (\nabla_{\beta}\mathbf{e}_{\alpha}) \cdot \nabla\mathbf{B} + \mathbf{e}_{\alpha} \cdot (\nabla_{\beta}\nabla\mathbf{B}) \rangle = \\ &= \langle \omega^{\mu}, \Gamma^{\nu}_{\alpha\beta} \mathbf{e}_{\nu} \cdot \nabla\mathbf{B} + \nabla\nabla\mathbf{B}(\dots, \mathbf{e}_{\alpha}, \mathbf{e}_{\beta}) \rangle = \\ &= B^{\mu}_{;\nu}\Gamma^{\nu}_{\alpha\beta} + B^{\mu}_{;\alpha\beta}. \end{aligned}$$

Поэтому

$$\begin{aligned} B^{\mu}_{;\alpha\beta} - B^{\mu}_{;\beta\alpha} &= \langle \omega^{\mu}, [\nabla_{\beta}, \nabla_{\alpha}]\mathbf{B} \rangle - B^{\mu}_{;\nu}(\Gamma^{\nu}_{\alpha\beta} - \Gamma^{\nu}_{\beta\alpha}) = \\ &= \langle \omega^{\mu}, [\nabla_{\beta}, \nabla_{\alpha}]\mathbf{B} \rangle - \langle \omega^{\mu}, \nabla_{(\nabla_{\beta}\mathbf{e}_{\alpha} - \nabla_{\alpha}\mathbf{e}_{\beta})}\mathbf{B} \rangle = \\ &= \langle \omega^{\mu}, ([\nabla_{\beta}, \nabla_{\alpha}] - \nabla_{[\mathbf{e}_{\beta}\mathbf{e}_{\alpha}]})\mathbf{B} \rangle = \langle \omega^{\mu}, \mathcal{R}(\mathbf{e}_{\beta}, \mathbf{e}_{\alpha})\mathbf{B} \rangle = \\ &= R^{\mu}_{\nu\beta\alpha} B^{\nu} \end{aligned}$$

в согласии с (16.6а). *Замечание:* Следствие некоторой неоднозначности абстрактной записи следует проявлять осторожность на каждой ступени расчета. В противоположность этому запись в компонентной форме полностью однозначна.]

УПРАЖНЕНИЯ

16.4. Прецессия равноденствий

а. Покажите, что закон переноса вектора S^α собственного углового момента Земли в искривленном пространстве-времени имеет вид

$$\frac{DS^\alpha}{d\tau} = \varepsilon^{\alpha\beta\gamma\delta} f_{\beta\mu} R^\mu{}_{\nu\gamma\zeta} u^\nu u^\zeta. \quad (16.8)$$

Здесь $d/d\tau = \mathbf{u}$ есть 4-скорость вдоль мировой линии Земли, $f_{\beta\mu}$ — приведенный квадрупольный момент Земли (часть второго момента функции распределения масс с равным нулю следом), определенный в земной локально лоренцевой системе отсчета соотношениями

$$f_{\hat{0}\hat{0}} = f_{\hat{0}\hat{j}} = 0, \quad f_{\hat{j}\hat{k}} = \int \rho (x^{\hat{j}} x^{\hat{k}} - \frac{1}{3} \hat{r}^2 \delta_{jk}) d^3x, \quad (16.9)$$

и $R^\mu{}_{\nu\gamma\zeta}$ — риманова кривизна в точке нахождения Земли, создаваемая Луной, Солнцем и планетами. [Указание: Выведите этот результат в земной локально лоренцевой системе отсчета, пренебрегая кривизной пространства-времени, созданной Землей. (В этой существенно ньютоновской ситуации компоненты кривизны $R^{\hat{j}}_{\hat{0}\hat{k}\hat{0}}$, созданные Землей, Солнцем, Луной и планетами, складываются линейно, «тяготение слишком слабо для нелинейности».) Проинтегрируйте момент сил относительно центра масс Земли, создаваемый приливными гравитационными силами («геодезическое отклонение»):

$$\left(\begin{array}{l} \text{ускорение в точке } x^{\hat{j}} \text{ относительно центра} \\ \text{масс } (x^{\hat{j}} = 0), \text{ вызванное приливными гра-} \\ \text{витационными силами, но частично сбалан-} \\ \text{сированное внутренними напряжениями} \\ \text{Земли} \end{array} \right) =$$

$$= \left(\frac{d^2 x^{\hat{k}}}{dt^2} \right)_{\substack{\text{геодезическое} \\ \text{отклонение}}}^{\hat{k}} = -R^{\hat{k}}_{\hat{0}\hat{i}\hat{0}} x^{\hat{i}} \text{ [см. уравнение (1.8')];}$$

$$\left(\begin{array}{l} \text{сила на единицу объема,} \\ \text{пропорциональная ускорению} \\ \text{относительно центра масс} \end{array} \right)^{\hat{k}} \overset{\text{плотность}}{\downarrow} \frac{d^2 x^{\hat{k}}}{dt^2} = -\rho R^{\hat{k}}_{\hat{0}\hat{i}\hat{0}} x^{\hat{i}};$$

УПРАЖНЕНИЯ

$$\left(\begin{array}{l} \text{момент сил на единицу объема} \\ \text{относительно центра масс} \end{array} \right)_{\hat{i}} = \varepsilon_{\hat{0}\hat{i}\hat{j}\hat{k}} x^{\hat{j}} (-\rho R^{\hat{k}}_{\hat{0}\hat{i}} x^{\hat{l}});$$

$$\left(\begin{array}{l} \text{полный момент} \\ \text{относительно центра масс} \end{array} \right)_{\hat{i}} = \int [\varepsilon_{\hat{0}\hat{i}\hat{j}\hat{k}} x^{\hat{j}} (-\rho R^{\hat{k}}_{\hat{0}\hat{i}} x^{\hat{l}})] d^3x.$$

Приведите это выражение к виду, содержащему $\Gamma_{\hat{j}\hat{i}}$, приравняйте его $dS_{\hat{i}}/d\tau$ и затем перепишите в не зависящей от системы отсчета компонентной форме. В результате должно получиться уравнение (16.8).]

б. Перепишите уравнение (16.8) в земной локально лоренцевой системе отсчета, воспользовавшись равенством

$$R^{\hat{j}}_{\hat{0}\hat{k}\hat{0}} = \partial^2 \Phi / \partial x^{\hat{j}} \partial k^{\hat{k}},$$

выражающим компоненты тензора Римана через ньютоновский гравитационный потенциал. (Ньютоновское приближение к теории Эйнштейна. Читатели курса 2 встретились с этим равенством в гл. 12, читатели курса 1 встретят его в § 17.4.)

в. Вычислите $dS^{\hat{j}}/d\hat{t}$, используя с самого начала ньютоновскую теорию тяготения. Ответ должен совпасть с ответом, полученным в пункте «б» с помощью теории Эйнштейна.

г. Считая Луну и Солнце точечными массами, вычислите дальнедействующее влияние порождаемых ими пространственно-временных кривизн на земную ось. Используйте результат пункта «б» и достаточно точные значения соответствующих параметров Солнечной системы. [Ответ: Земная ось прецессирует по отношению к осям ее локально лоренцевой системы отсчета («прецессия равнодействий», «общая прецессия»), период прецессии равен 26 000 лет. Детали расчета можно найти в любом учебнике по небесной механике.]

**Дополнение 16.1. ПРОБЛЕМА ПОРЯДКА ИНДЕКСОВ И ЕЕ СВЯЗЬ
С КРИВИЗНОЙ В ПРИЛОЖЕНИЯХ ПРИНЦИПА ЭКВИВАЛЕНТНОСТИ**

Задача

В каком порядке следует писать производные при применении правила «запятая переходит в точку с запятой»? В плоском пространстве-времени перестановка производных не играет роли, однако в искривленном пространстве-времени она приводит к дополнительным членам, пропорциональным кривизне, например $2B^{\alpha}_{[\gamma\beta]} \equiv B^{\alpha}_{;\gamma\beta} - B^{\alpha}_{;\beta\gamma} = R^{\alpha}_{\mu\beta\gamma} B^{\mu}$ для любого векторного поля (см. упражнение 16.3). Следовательно, задачу можно переформулировать так: *Когда при применении правила перехода запятой в точку с запятой следует прибавлять члены, пропорциональные кривизне?*

Решение

В общем случае решение отсутствует, однако в большинстве случаев к однозначному решению приводят следующего рода математическое и физическое соображения.

А. По чисто математическим признакам члены, пропорциональные кривизне, почти всегда возникают из-за некоммутативности ковариантных производных. Следовательно, необходимо подумать об этих членах в любом уравнении, содержащем двойную ковариантную производную (например, $-A^{\alpha, \mu}_{; \mu} + A^{\mu, \alpha}_{; \mu} = 4\pi J^{\alpha}$), иначе говоря, в любом уравнении, вывод которого из более фундаментальных законов содержит двойные ковариантные производные (например, $\nabla_{\mu} \mathbf{S} = 0$ в примере 3 п. Б.) Во всех остальных случаях вопрос о дополнительных членах, пропорциональных кривизне, можно игнорировать (например, в максвелловских уравнениях первого порядка).

Б. Члены, пропорциональные кривизне, могут просто не возникать по чисто физической причине. Поэтому при применении правила «запятая переходит в точку с запятой» только к физически измеримым величина (например, к электромагнитному полю, но не к векторному потенциалу) можно «интуитивно чувствовать», насколько вероятно их появление.

Примеры:

1. *Локальный закон сохранения энергии-импульса.* Добавление членов, пропорциональных кривизне, в уравнениях $T^{\alpha\beta}_{; \beta} = 0$, например, путем замены их на уравнения $T^{\alpha\beta}_{; \beta} = R^{\alpha}_{\beta\gamma\delta} T^{\beta\gamma} u^{\delta}$ не имеет смысла вообще. В локально инерциальной системе отсчета члены типа $R^{\alpha}_{\beta\gamma\delta} T^{\beta\gamma} u^{\delta}$ можно интерпретировать как силы, создаваемые кривизной в отдельной точке. Однако кривизну можно почувствовать только в конечной области, а не в точке (геодезическое отклонение и т. д.)! Иначе говоря, вторые производные гравитационного потенциала (метрики) приведут только к приливным силам!
2. *Уравнения Максвелла для тензора электромагнитного поля.* Здесь также неестественно вводить члены, пропорциональные кривизне. Они приведут к нарушению закона сохранения заряда в том смысле, что силовые линии электрического и магнитного полей будут оканчиваться в точках, где есть кривизна и отсутствует заряд. Чтобы не нарушать закон сохранения заряда при переводе уравнений Максвелла (3.32) и (3.36) в искривленное пространство-время, члены, пропорциональные кривизне, опускают:

$$F^{\alpha\beta}_{; \beta} = 4\pi J^{\alpha}, \quad F_{\alpha\beta}_{; \gamma} + F_{\beta\gamma}_{; \alpha} + F_{\gamma\alpha}_{; \beta} = 0.$$

Более того, считается, что $F_{\mu\nu}$ выражается через векторный потенциал с помощью формулы (3.54') с заменой запятых на точки с запятой:

$$F_{\mu\nu} = A_{\nu; \mu} - A_{\mu; \nu}.$$

При этом, как легко проверить, вторая пара уравнений Максвелла удовлетворяется тождественно, а первая справедлива тогда и только тогда, когда

$$-A^{\alpha; \mu}_{; \mu} + A^{\mu}_{; \mu}{}^{\alpha} + R^{\alpha}_{\mu} A^{\mu} = 4\pi J^{\alpha}$$

(Более полное обсуждение и вывод см. в § 22.4.)

3. *Закон переноса вектора момента импульса Земли.* Если бы Земля была в плоском пространстве-времени, то, как и любое другое изолированное тело, она бы осуществляла параллельный перенос вектора собственного момента импульса $\mathbf{S}$ вдоль мировой линии, по которой движется ее центр масс $\nabla_\mu \mathbf{S} = 0$ («сохранение момента импульса»). Можно ли при переводе этого закона переноса в искривленное пространство-время (в котором действительно находится Земля!) игнорировать член пропорциональный кривизне? Нет! Пространственно-временные кривизны, обязанные присутствию Луны и Солнца, вызывают на Земле приливные гравитационные силы, а так как Земля имеет экваториальный выступ, приливные силы дают ненулевой вклад во вращательный момент относительно центра масс Земли. (На ньютоновском языке это означает, что на кусок выступа, ближайший к Луне, действует большая притягивающая сила и, следовательно, больший вращательный момент, чем на кусок выступа, наиболее удаленный от Луны.) Поэтому следует ожидать, что в искривленном пространстве-времени закон переноса будет иметь вид

$$\nabla_\mu \mathbf{S} = (\text{тензор Римана}) \times (\text{квадрупольный момент Земли}).$$

Этот вращательный момент, связанный с кривизной, вызывает прецессию оси вращения Земли. Полный цикл в плоскости эклиптики совершается за 26 000 лет («общая прецессия», «прецессия равноденствий», открытая Гиппархом приблизительно в 150 г. до н. э.). Точный вид члена с кривизной получен в упражнении 16.4.

§ 16.4. ЧАСЫ И СТЕРЖНИ, ИСПОЛЬЗУЕМЫЕ ДЛЯ ИЗМЕРЕНИЯ ВРЕМЕННЫХ И ПРОСТРАНСТВЕННЫХ ИНТЕРВАЛОВ

Обратимся теперь к природе стержней и часов, которые следует использовать для измерения длин и временных интервалов, появляющихся в физических законах в присутствии тяготения.

Нет необходимости (а в действительности и не должно быть!), чтобы собственная длина s измерялась стержнем определенного типа (например, метровой платиновой палкой) или чтобы собственное время τ измерялось часами определенного типа (например, водородными мазерными часами). Скорее следует привлечь сами физические законы, чтобы узнать, какого рода стержни и часы необходимо применять в измерениях. Иначе говоря, «идеальными стержнями и часами» называются такие стержни и часы, которые измеряют собственную длину, заданную выражением $ds = (g_{\alpha\beta} dx^\alpha dx^\beta)^{1/2}$, или собственное время, заданное выражением $d\tau = (-g_{\alpha\beta} dx^\alpha dx^\beta)^{1/2}$ (тип часов, к которым привели физические аргументы, § 1.5). Кроме того, применяя законы физики для анализа поведения стержней и часов, следует определить точность, с которой стержни и часы идеальны в данных условиях.

В качестве очевидного примера рассмотрим маятниковые часы. Если они покоятся на поверхности Земли и достаточно малы,

Определение
идеальных
стержней и часов

Насколько
идеальны
реальные часы?
1) Маятниковые
часы

чтобы можно было пренебречь красным смещением из-за конечности размеров часов и замедлением хода времени из-за скорости качаний, и если требуемая точность достаточно мала, чтобы можно было пренебречь временными изменениями в локальном гравитационном ускорении из-за земных приливов, тогда законы физики утверждают (дополнение 16.2), что маятниковые часы являются «идеальными». Однако в любом другом случае (например, при путешествии на ракете к Луне) маятниковые часы будут далеки от идеальности. Беспорядочно изменяющиеся ускорения или полное отсутствие ускорения сделают их бесполезными!

Большой интерес представляют различного рода атомные и ядерные часы. Такие часы проще всего рассматривать, когда они свободно падают. В таком случае исследование можно проводить в локально лоренцевой системе покоя часов, используя стандартные уравнения квантовой теории, и, конечно, собственное время будет измерено с точностью, достигнутой при конструировании часов ($\Delta t/t \sim 10^{-9} - 10^{-14}$). Однако нечасто можно позволить часам свободно падать. (Столкновение с поверхностью Земли может дорого обойтись!) Тем не менее даже при ускорении « $1g$ » = 980 см/с^2 на поверхности Земли или « $2g$ » на самолете, делающем попытку уклониться от столкновения в воздушном пространстве (дополнение 16.3), атомные часы, если они достаточно прочны, будут измерять собственное время $d\tau = (-g_{\alpha\beta} dx^\alpha dx^\beta)^{1/2}$ вдоль своей мировой линии приблизительно с той же точностью, как если бы они свободно падали. Каждый, кто захочет это проверить, может провести соответствующий эксперимент. Альтернативно, можно рассматривать часы в их «собственной системе отсчета» (§ 13.6) с базисными векторами, переносимыми по Ферми — Уолкеру, применяя стандартные локально лоренцевы законы квантовой механики, обобщенные на случай ускоренных систем отсчета (локально лоренцевы законы плюс «инерциальная» сила, которую можно трактовать как обусловленную потенциалом, градиент которого линейно зависит от координат).

Конечно, любые часы имеют «предельное напряжение», превысив которое они перестают нормально работать (дополнение 16.3). Однако это предельное напряжение в основном зависит от конструкции часов, а вовсе не от какого-либо «универсального влияния ускорения на ход времени». Универсальное замедление хода времени вызывает скорость, но не ускорение.

Старение человеческого тела происходит по тем же электромагнитным и квантовомеханическим законам, которые определяют периодичности и переходы между уровнями в атомах и молекулах. Следовательно, старение, подобно атомным процессам, связано с собственным временем, контролируемым метрикой. Хотя, конечно, оно связано и с другими вещами, например с курением сигарет.

2) Атомные часы

3) Человеческие часы